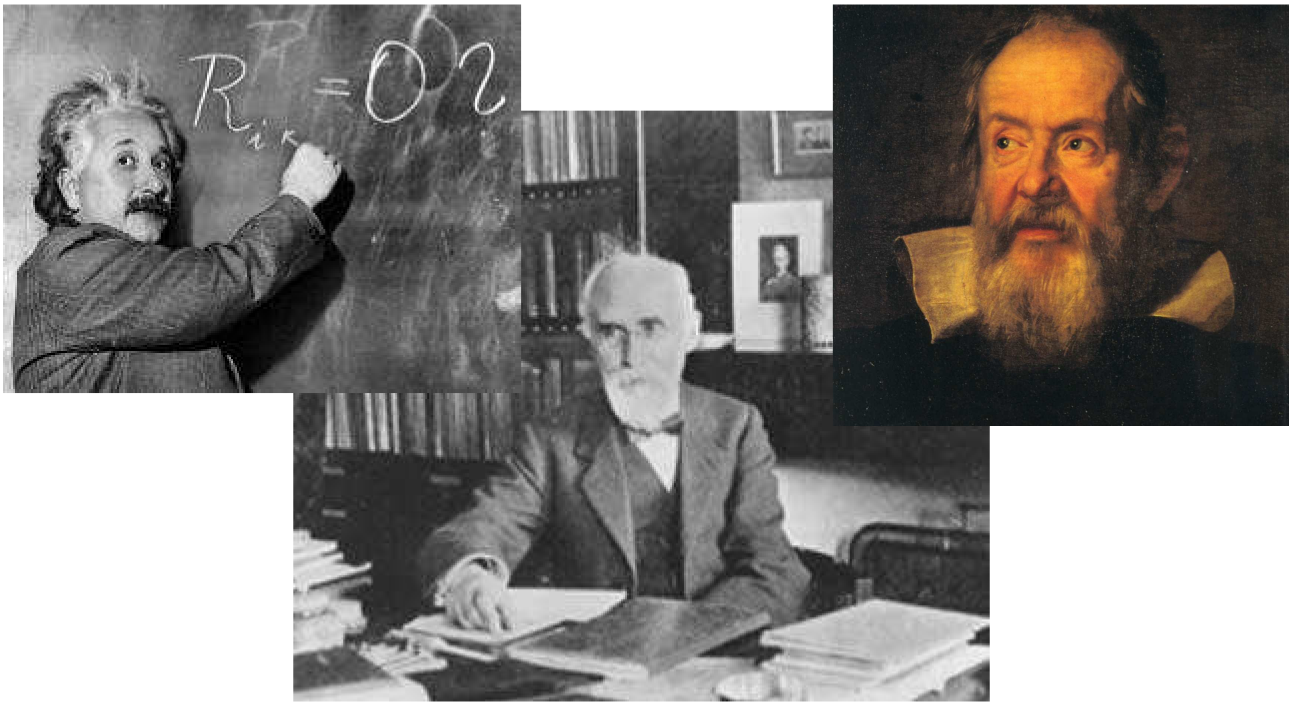
Gruppo
Astrofili
F. Argelander

# Relatività Speciale o Ristretta

## *Semplici concetti e implicazioni*





Autore: Paolo Botton – *Responsabile scientifico*



Data: giovedì 27 gennaio 2011 ore 20:45

# Indice

# 1. Introduzione

Questo breve scritto risale alla fine degli anni '80 (del 900), quando alcuni colleghi di lavoro mi chiesero se esisteva una dimostrazione formale degli effetti relativistici. Fresco dell'ultimo esame di Fisica, mi misi all'opera con carta e matita. Ho trasferito in questo *pdf* il contenuto della carta ingiallita ritrovata in uno scatolone che rilasciava ancora il profumo dei ricordi di una gioventù spensierata.

# 2. Sistemi di riferimento e trasformate di Galileo-Lorentz

Nella vita di ogni giorno, quando indichiamo un oggetto in movimento, come un'auto o un aereo, ma anche una persona, lo facciamo in luogo del nostro *sistema di riferimento*.

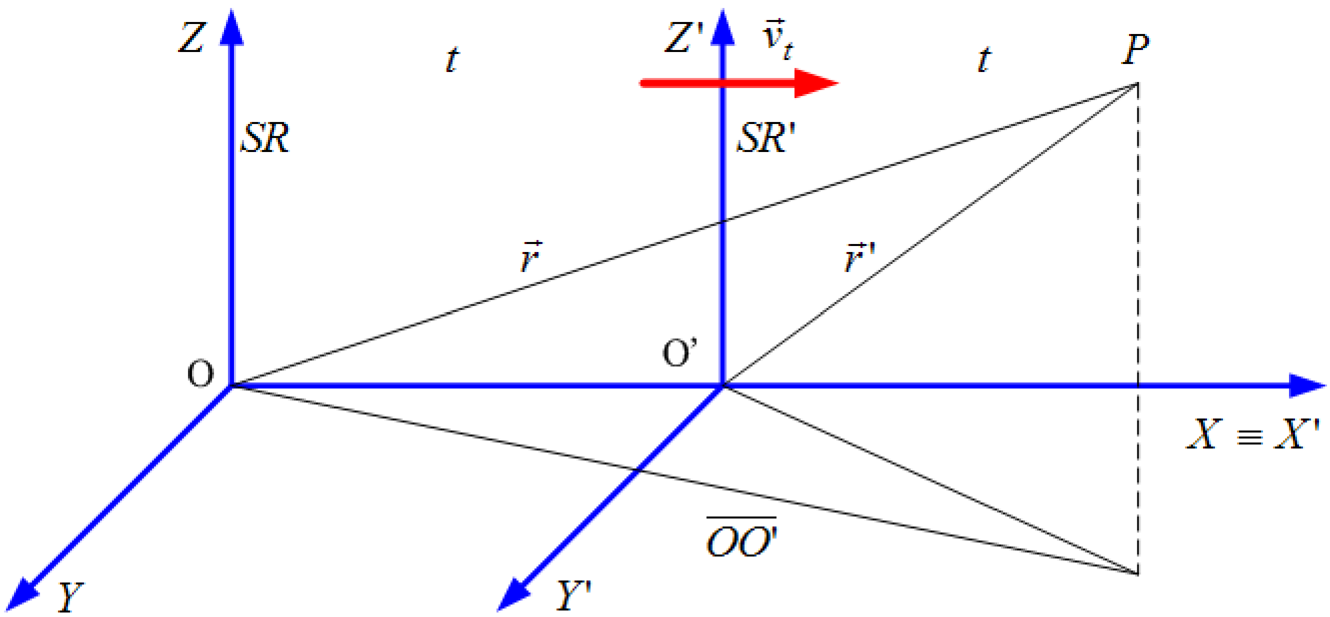
Un sistema di riferimento è quindi l'insieme dei riferimenti o coordinate utilizzate per individuare la posizione di un oggetto nello spazio. Per lo studio del problema relativistico, torna utile considerare il comportamento di un oggetto mobile rispetto a due sistemi di riferimento (SR) l'uno in moto traslatorio rispetto all'altro. Consideriamo quindi un moto traslatorio con velocità pari a $\vec{V}_t$, ma si pongano anche dei vincoli, ossia che la velocità sia molto minore della velocità della luce $c$.

## 2.1. Trasformate di Galileo

Posto il vincolo $\vec{V}_t \langle\langle c$, si considerino due coppie di terne di assi nello spazio e due sistemi di riferimento: SR solidale con O e SR' solidale con O'.

O' si trova nella condizione di *moto traslatorio uniforme* rispetto a O, con velocità $\vec{V}_t$.

Sia inoltre $X \equiv X'$, P(X,Y,Z) il punto in movimento e $t$ il tempo comune ai due sistemi di riferimento SR e SR'.




Come prima operazione, si calcola la posizione di P rispetto a O':

$\vec{r}\,' = \vec{r} - \overline{OO'}$, ma $\overline{OO'} = \vec{v}_t\, t$, quindi $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}_t\, t$.

La *velocità relativa* di P sarà quindi data dalla derivata di $r'$ rispetto al tempo:

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d(\vec{v}_t\, t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \left[\frac{d\vec{v}_t}{dt} t + \frac{dt}{dt} \vec{v}_t\right].$$

Ma $\vec{v}_t$ è costante, trattandosi di un moto traslatorio uniforme e la derivata di una costante vale zero, pertanto si avrà:

$\vec{v}'=\vec{v}-0\,t+1\vec{v}_t$, cioè

$$\vec{v}'=\vec{v}-\vec{v}_t$$ **Trasformata di Galileo per la velocità**

Questo risultato indica che la *velocità relativa* di P vista da SR' solidale con O' è data dalla velocità P vista da SR solidale con O, a meno della velocità di traslazione di SR' in O'.
È noto che l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo; utilizzando la Trasformata di Galileo per la velocità, si ottiene:

$$\vec{a}'=\frac{d\vec{v}'}{dt}=\frac{d(\vec{v}-\vec{v}_t)}{dt}=\frac{d\vec{v}}{dt}-\frac{d\vec{v}_t}{dt}.$$

Ma $\vec{v}_t$ è costante, trattandosi di un moto traslatorio uniforme e la derivata di una costante vale zero, pertanto si avrà:

$\vec{a}'=\vec{a}-0$, cioè

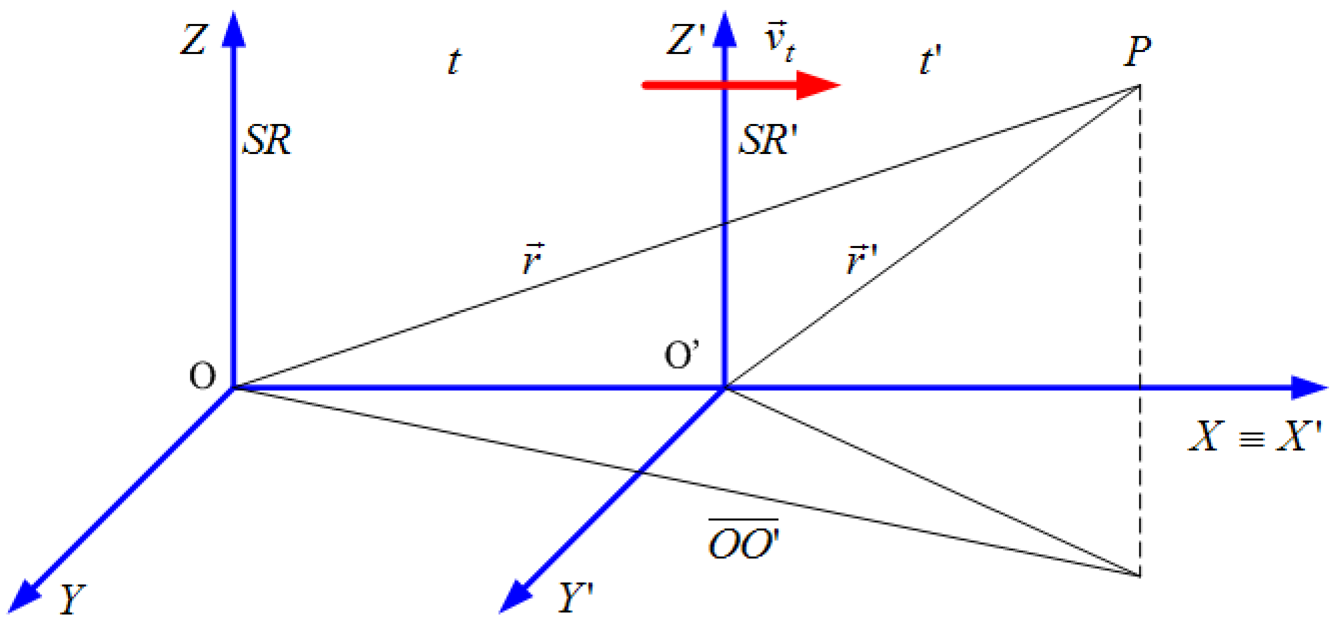
$$\vec{a}'=\vec{a}$$ **Trasformata di Galileo per l'accelerazione**

Questo risultato indica che l'*accelerazione è invariante*, rispetto alle trasformate di Galileo.
Ora che abbiamo le due trasformate, è il momento di modificare il vincolo imposto sulla velocità, ponendo $\vec{v}_t$ prossima alla velocità della luce $c$.

## 2.2. Trasformate di Lorentz

$$\vec{v}_t \cong c$$

Si prendono in considerazione le due terne di assi precedenti, con l'accortezza d'indicate $t$ e $t'$ i tempi relativi ai due sistemi di riferimento SR e SR'.



Spazio e tempo sono omogenei e gli assi $X$ e $X'$ sono *sempre* fra loro coincidenti e quindi quando $Y=0$ e $Z=0$ (coordinate del sistema di riferimento SR), deve essere sempre $Y'=0$, $Z'=0$ (coordinate del sistema di riferimento SR').

L'osservatore posto in O' vedrà le coordinate $z$' e y' non variare, pertanto $z'=z$ e $y'=y$.

Rimangono ora le equazioni di trasformazione per $x'$ e $t'$.

Basandoci sull'ipotesi che lo spazio sia *isotropo*, dobbiamo per forza di cose supporre che $t'$ non dipenda né da $y'$ né da $z'$, pertanto, utilizzando le Trasformate di Galileo, scriviamo

$$t'=at+b\vec{x} \qquad [1a]$$

Per quanto riguarda l'equazione per $x'$, un punto di coordinata $\vec{x}'=0$ per SR' sembra muoversi nel verso positivo dell'asse $x$ con velocità $\vec{v}_t$, quindi se $\vec{x}-\vec{v}_t t=0$ e $\vec{x}'=0$, utilizzando le Trasformate di Galileo, si può scrivere

$$\vec{x}'=\gamma(\vec{x}-\vec{v}_t\, t) \qquad [1b]$$

dove $\gamma, a, b$ sono coefficienti da calcolare, introdotti considerando $\vec{v}_t \cong c$.

Per determinare i coefficienti $\gamma, a, b$ teniamo presente che la velocità della luce è una costante.

S'immagini che al tempo $t'=t=0$, **quando le due terne sono coincidenti,** un'onda elettromagnetica sferica si propaghi con velocità *c* in tutte le direzioni. Il raggio *r* delle sfere varrà $ct'$ e $ct'$.

L'osservatore in SR, posto in O, descriverà lo spazio percorso dal punto P sul "fronte" dell'onda sferica scrivendo la seguente equazione:

$$\vec{r}^{\,2}=\vec{x}^{\,2}+\vec{y}^{\,2}+\vec{z}^{\,2}=\vec{c}^{\,2}\,t^2$$

L'osservatore in SR', posto in O', descriverà lo spazio percorso dal punto P sul "fronte" dell'onda sferica scrivendo la seguente equazione:

$$\vec{r}\,'^2=\vec{x}\,'^2+\vec{y}\,'^2+\vec{z}\,'^2=\vec{r}\,'^2=\vec{c}^{\,2}\,t'^2$$

Sostituendo a questa relazione la [*1a*] e la [*1b*], la stessa assume la seguente forma:

$$\gamma^2(\vec{x}-\vec{v}_t\,t)^2+\vec{y}^{\,2}+\vec{z}^{\,2}=\vec{c}^{\,2}(at+b\vec{x})^2.$$

Si sviluppano i membri:

$$\gamma^2\vec{x}^{\,2}+\gamma^2\,\vec{v}_t^{\,2}\,t^2-2\gamma^2\vec{x}\,\vec{v}_t\,t+\vec{y}^{\,2}+\vec{z}^{\,2}=\vec{c}^{\,2}\,a^2\,t^2+\vec{c}^{\,2}\,b^2\,\vec{x}^{\,2}+2\vec{c}^{\,2}\,a\,t\,b\,\vec{x}$$

Si sposta il secondo membro alla sinistra della relazione:

$$\gamma^2\vec{x}^{\,2}+\gamma^2\,\vec{v}_t^{\,2}\,t^2-2\gamma^2\vec{x}\,\vec{v}_t\,t+\vec{y}^{\,2}+\vec{z}^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\,a^2\,t^2-\vec{c}^{\,2}\,b^2\,\vec{x}^{\,2}-2\vec{c}^{\,2}\,a\,t\,b\,\vec{x}=0$$

Si raccoglie a fattor comune per $x$, $y$, $z$ e $t$.

$$\vec{x}^{\,2}(\gamma^2-\vec{c}^{\,2}\,b^2)+\vec{y}^{\,2}+\vec{z}^{\,2}-2\vec{x}\,t(\gamma^2\,\vec{v}_t-c^2ba)=t^2(\vec{c}^{\,2}a^2-\gamma^2\,\vec{v}_t^{\,2})$$

Affinché l'espressione sia confrontabile con quella dell'osservatore solidale in O, deve essere:

$(\gamma^2-\vec{c}^{\,2}\,b^2)=1$, infatti il coefficiente di $\vec{x}^{\,2}$ vale proprio 1.

$(\gamma^2\,\vec{v}_t-c^2ba)=0$, infatti non esiste alcun membro $2\vec{x}\,t$.

$(\vec{c}^{\,2}a^2-\gamma^2\,\vec{v}_t^{\,2})=c^2$, infatti il coefficiente di $t^2$ è proprio $c^2$.

Si possiedono ora tre equazioni nelle tre incognite $\gamma$, $a$ e $b$.

Si impone il sistema... $\begin{cases} \gamma^2 - \vec{c}^2 b^2 = 1 \\ \gamma^2 \vec{v}_t - c^2 b a = 0 \\ \vec{c}^2 a^2 - \gamma^2 \vec{v}_t^2 = c^2 \end{cases}$ la cui soluzione è, dopo i numerosi passaggi:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}} \qquad b = \frac{\vec{v}_t}{\vec{c}^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}}$$

Da queste relazioni, sostituendo $\gamma$, $a$ e $b$ nelle [*1a* e *1b*], si ottiene l'insieme delle **Trasformate di Lorentz per le coordinate spazio-temporali**:

$$\boxed{\vec{y}' = y}$$

$$\boxed{\vec{z}' = z}$$

$$\boxed{\vec{x}' = \frac{\vec{x} - \vec{v}_t t}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}}}$$

*ricavata come...*

$$\vec{x}' = \gamma(\vec{x} - \vec{v}_t t) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}}(\vec{x} - \vec{v}_t t)$$

$$\boxed{t' = \frac{t - \frac{\vec{v}_t}{\vec{c}^2}\vec{x}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}}}$$

*ricavata come...*

$$t' = at + b\vec{x} = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}} - \frac{\vec{v}_t}{\vec{c}^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}}\vec{x} = \frac{\vec{c}^2 t - \vec{v}_t \vec{x}}{\vec{c}^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}} = \frac{\frac{\vec{c}^2 t}{\vec{c}^2} - \frac{\vec{v}_t \vec{x}}{\vec{c}^2}}{\frac{\vec{c}^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}}{\vec{c}^2}}$$

Il termine $\sqrt{1-\frac{\vec{v}_t^2}{\vec{c}^2}}$ è definito **Fattore Relativistico** $\beta$.

Si nota immediatamente che lo spazio ed il tempo, per velocità prossime a quella della luce, non rispondono più alle leggi della fisica classica, ma differiscono in relazione al sistema di riferimento considerato.

$$x(O) \neq x(O') \qquad \text{e} \qquad t(O) \neq t(O')$$

Sfruttando le relazioni $t' = at + bx$ e $x' = \gamma(x - v_t\ t)$ in forma generica, si possono calcolare le **trasformate di Lorentz per la velocità**.

Poiché la velocità è la derivata prima dello spazio rispetto al tempo $v' = \frac{dx'}{dt'}$, per calcolarla devo ricavare $dx'$ e $dt'$.
Calcolo quindi $dx'$, derivando lo spazio $x'$ dispetto al tempo $t$.

$$[x' = \gamma(x - v_t\, t)]'_{dt} \Rightarrow \frac{dx'}{dt} = \gamma\left(\frac{dx}{dt} - v_t \frac{dt}{dt}\right) = \gamma(v - v_t) \Rightarrow \frac{dx'}{dt} = \gamma(v - v_t)$$ , da cui:

$$\boxed{dx' = \gamma(v - v_t)\, dt}$$

Calcolo ora $dt'$, derivando il tempo $t'$ dispetto al tempo $t$.

$$[t' = at + bx]'_{dt} \Rightarrow \frac{dt'}{dt} = \left(a\frac{dt}{dt} + b\frac{dx}{dt}\right) = a + bv.$$

Ma... $a = \gamma$ e $b = \frac{\vec{v}_t}{\vec{c}^2\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_t^{\,2}}{\vec{c}^2}}}$, pertanto si ha $\frac{dt'}{dt} = \gamma + \frac{\vec{v}_t\, v}{\vec{c}^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_t^{\,2}}{\vec{c}^2}}}$ ...

Il termine $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_t^{\,2}}{\vec{c}^2}}} = \gamma$, quindi $\frac{dt'}{dt} = \gamma + \frac{\vec{v}_t\, v}{\vec{c}^2}\gamma = \gamma\left(1 + \frac{\vec{v}_t\, v}{\vec{c}^2}\right)$. In definitiva si ha:

$$\boxed{dt' = \gamma\left(1 + \frac{\vec{v}_t\, v}{\vec{c}^2}\right)dt}$$

È ora possibile calcolare $v'$

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(v - v_t)dt}{\gamma\left(1 + \frac{\vec{v}_t\, v}{\vec{c}^2}\right)dt} = \frac{v - v_t}{1 + \frac{\vec{v}_t\, v}{\vec{c}^2}} \Rightarrow \boxed{v' = \frac{v - v_t}{1 + \frac{\vec{v}_t\, v}{\vec{c}^2}}}$$

Per passare da un sistema di riferimento SR' all'altro SR è sufficiente scambiare $v$ con $v'$ ed invertire i segni, ottenendo

$$\boxed{v = \frac{v' + v_t}{1 + \frac{\vec{v}_t\, v'}{\vec{c}^2}}}$$

## 2.3. Relazione massa-velocità

Si nota che nelle equazioni di Lorentz è presente il Fattore Relativistico $\beta$, ossia $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Se $v$ fosse maggiore di $c$, $\beta$ rappresenterebbe la radice di un numero negativo, cosa non accettabile, poiché non si definiscono radici di numeri negativi.

La velocità limite per il moto di qualunque oggetto naturale è dunque $c$.
$c$ è una velocità limite solo per gli oggetti naturali perché i fenomeni cinematici possono avere una velocità maggiore. Il paradigma di una forbice gigante fa capire che noi muoviamo sì le lame a velocità inferiore a quella della luce, ma la successione dei punti di intersezione delle lame può avere una velocità maggiore di quella limite $c$.
È una cosa comunemente accettata in cosmologia, dove lo spazio tra una galassia e l'altra può espandersi a velocità maggiori a quella della luce.
È dimostrabile che anche la massa di un corpo varia quando esso si muove con velocità costante $v$.
La dinamica asserisce che $v = v_0 + at$, dove $v_0$ è la velocità iniziale del corpo.
Si può pensare erroneamente che un'accelerazione uniforme protratta per un tempo t possa fare in modo che $v = c$. L'ipotesi non è valida dato che nessun corpo può viaggiare più veloce della luce.

Il *Secondo Principio di Newton,* o d'inerzia, afferma che $F = ma$, quindi $a = \frac{F}{m}$.

Sostituendo questa relazione nella precedente equazione del moto, si ha che $v = v_0 + \frac{F}{m}t$.

Ora, se supponiamo F = costante, l'aumento della massa m è l'unico fattore che non permette alla velocità $v$ di superare $c$, rappresentando esso un fattore di proporzionalità inversa.

L'equazione che esprime la variazione della massa di un corpo è $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Dove $m_0$ è la massa del corpo a riposo.
Si nota subito che qualora $v \cong c$, la massa $m$ tende ad un valore infinito...

$v = v_0 + \frac{F}{\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}t$. Se $v = c$, si ha $v = v_0 + \frac{F}{\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}}}t = v_0 + \frac{F}{\frac{m_0}{\sqrt{1-1}}}t$, quindi:

$v = v_0 + \frac{F}{\frac{m_0}{0}}t = v_0 + \frac{F}{\infty}t = v_0 + 0t$. Pertanto è $v = v_0$ e quindi $c$ non è superata.

## 2.4. Equazione relativistica per l'energia

Si è appena visto che l'equazione che esprime la variazione della massa di un corpo è $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, dove $m_0$ è la massa del corpo a riposo.

È noto che l'equazione di Einstein che lega l'energia alla massa e viceversa è $E = mc^2$.

La stessa si scrive in modo più corretto come $E = \Delta mc^2 = (m - m_0)c^2$.
Sostituendo il termine $m$ con la relazione che esprime la variazione della massa di un corpo, si ha:

$$E = (m - m_0)c^2 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}c^2 - m_0c^2;$$

pertanto

$$\boxed{E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}c^2 - m_0c^2}$$

Il primo termine è strettamente legato alla velocità $v$ del corpo mentre il secondo termine è slegato da questa grandezza, quindi si può definire *energia di riposo o di quiete*.
Questa legge sembra discostarsi molto dalla classica equazione per l'energia cinetica ma in realtà, quando $v$ è molto minore di $c$, le due equazioni si assomigliano; vediamo di arrivarci con una serie di passaggi.
È noto che lo scopo delle formule di *Taylor* e di *McLaurin* è di approssimare una funzione con un polinomio di grado $k$ arbitrario centrato in $x_0$ nel caso della formula di *Taylor*, e in zero nel caso di quella di *McLaurin*.
Una funzione $f(x)$, che passi per un punto $x_0$ e che abbia in quel punto tutte le derivate necessarie, si può approssimare nel punto $x_0$ mediante un *polinomio di Taylor* così definito:

$$P_k(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f^{''}(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}f^k(x_0)(x - x_0)^k$$

Nel caso in cui il punto $x_0$ sia l'origine $(x_0 = 0)$ si ottiene la *formula di McLaurin*

$$f(x) \sim f(0) + f^{'}(0)x + \frac{1}{2!}f^{''}(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^n(0)x^k$$

L'errore che si commette nell'approssimazione con la serie non è maggiore della prima derivata che si trascura.
Per calcolare lo sviluppo di *McLaurin* di una funzione assegnata si procede calcolando le derivate successive di $f(x)$ e calcolandone i valori in corrispondenza di $x=x_0$; tornando quindi alla relazione sull'energia, si nota che quando $v \langle\langle\, c$ ($v$ *molto minore* di $c$), il rapporto $\frac{v}{c}$ tenderà a zero; in tale ipotesi è possibile fare lo sviluppo in serie di *McLaurin*, che fornisce un'espressione approssimata della funzione nel punto zero.

Sapendo che $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, se pongo $X = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ considerando come variabile del polinomio $\frac{v}{c}$, ho di fatto che $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - X}}$.
Se ci si limita alla derivata prima, s'introduce un'approssimazione trascurabile e lo sviluppo in serie di *McLaurin* mi darà:

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}X^2 +$ i termini di ordine superiore che non considero.

In conclusione, per il termine $\frac{1}{\beta}$, vale la seguente approssimazione: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

Sostituisco questa relazione in $E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 - m_0c^2$ e la sviluppo…

$$E = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)m_0c^2 - m_0c^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}m_0c^2 - m_0c^2 = \frac{1}{2}v^2m_0.$$

Ho ottenuto $\boxed{E = \frac{1}{2}m_0v^2}$ ossia l'equazione dell'energia cinetica.

### 2.4.1. Considerazioni

Quando si parla di energia di riposo, riferendoci al termine $E = m_0c^2$ non si parla di un concetto astratto introdotto per far tornare dei conti. È stato ampiamente dimostrato in laboratorio che la conversione dell'energia di riposo in energia cinetica, con una corrispondente perdita di massa, è un fenomeno che si verifica comunemente e continuamente nel decadimento radioattivo e nelle reazioni nucleari.

L'espressione $E = \Delta mc^2 = (m - m_0)c^2$ fornisce l'indicazione dell'aumento d'energia di una particella in moto, di massa relativistica $m$, rispetto la massa a riposo $m_0$.

# 3. Implicazioni della Relatività Speciale o Ristretta

## 3.1. Postulati della Relatività

Il **Primo postulato** (o principio di relatività) è un'estensione di quello di Galilei, e recita:

*tutte le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali*

Il **Secondo postulato** (o d'invarianza della luce) asserisce che la velocità della luce dipende da valori costanti relativi al mezzo di propagazione e non al moto relativo dei sistemi di riferimento:

*la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dalla velocità dell'osservatore o dalla velocità della sorgente di luce.*

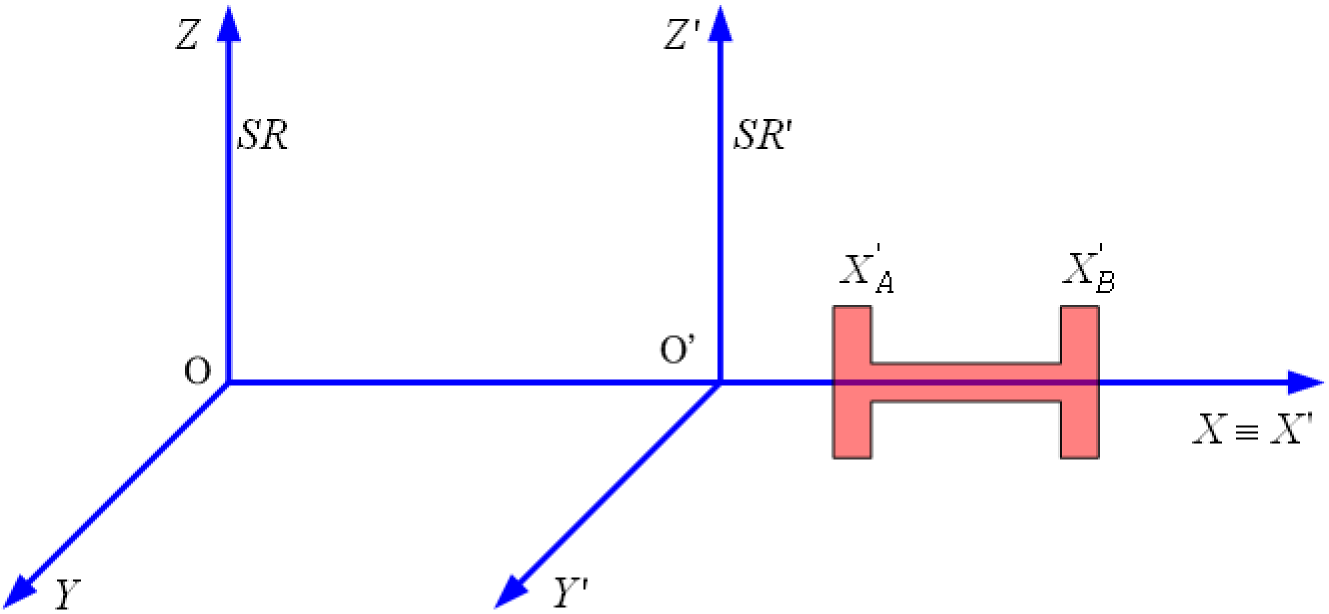
Il concetto di simultaneità perde la sua assolutezza; infatti, se la velocità della luce è finita ed è la stessa per ogni osservatore, due eventi simultanei in un sistema inerziale SR non lo sono più se osservati da un altro sistema inerziale SR' in moto rispetto a SR.

## 3.2. La contrazione delle lunghezze

Per la dimostrazione di questo effetto relativistico, prendiamo nuovamente in considerazione la terna di assi con i due sistemi di riferimento SR e SR' e supponiamo di voler misurare la lunghezza della barra $X'_A X'_B$, posta in SR'.

Per eseguire la misura è necessario *rilevare simultaneamente* le posizioni di $X'_A$ e di $X'_B$, la cui differenza è indicativa della dimensione lineare della barra $L'$.

- l'osservatore in SR rileva $X_A X_B$;
- l'osservatore in SR' rileva $X'_A X'_B$.




Utilizzando la **Trasformata di Lorentz per lo Spazio**, $x' = \gamma(x - v_t t)$, ottengo:

$$X'_A = \gamma(X_A - v_t t_A) \qquad \text{e} \qquad X'_B = \gamma(X_B - v_t t_B)$$

La simultaneità del rilevamento impone che $t_A = t_B$, pertanto si ha

$$X'_A = \gamma(X_A - v_t t) \qquad \text{e} \qquad X'_B = \gamma(X_B - v_t t)$$

S'è detto che la dimensione della barra è data dalla differenza tra $X'_A$ e $X'_B$, ossia

$L' = X'_B - X_A$, quindi, sostituendo ai termini $X'_A$ e $X'_B$ le rispettive relazioni, ottengo

$L' = \gamma(X_B - v_t t) - \gamma(X_A - v_t t) = \gamma(X_B - v_t t - X_A + v_t t)$.

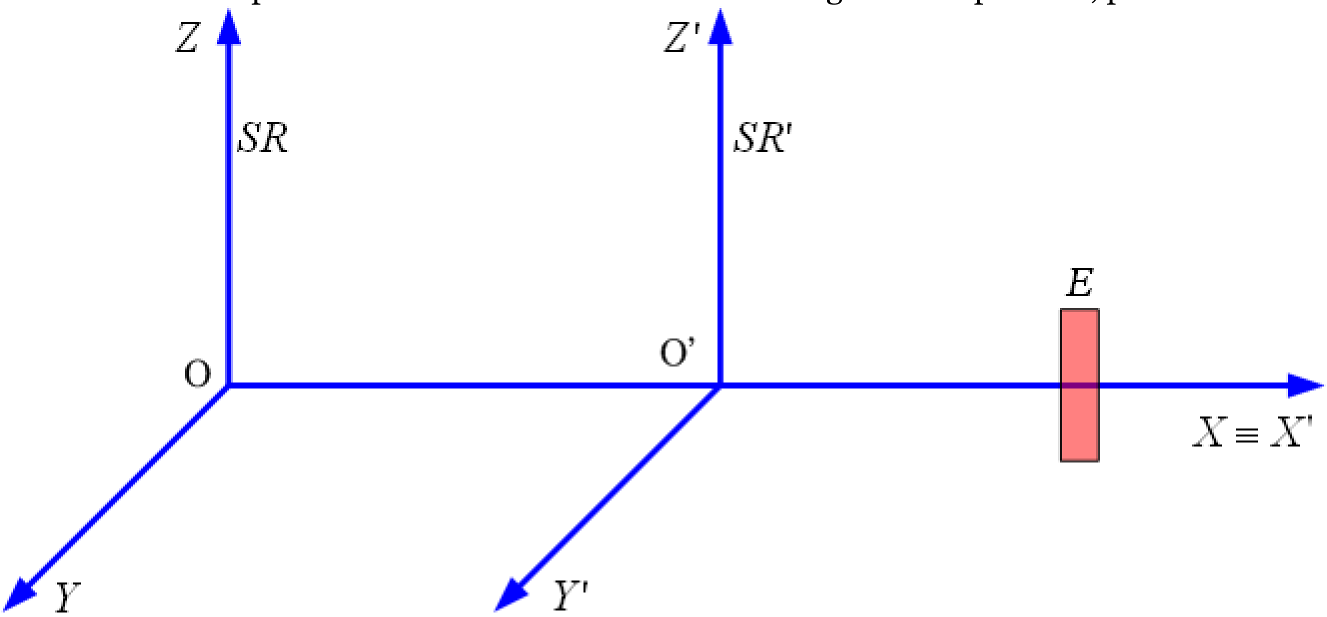
Elidendo i termini uguali ed opposti ottengo che $L' = \gamma(X_B - X_A)$, ossia $L' = \gamma L$.

Ma è noto che il termine $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\vec{v}_t^{\,2}}{\vec{c}^{\,2}}}}$, ossia $\gamma > 1$, allora $\dfrac{L'}{L} > 1$ e **L < L'**

La lunghezza calcolata da SR risulta minore di quello calcolata in SR', pertanto:
***Una lunghezza in un sistema di riferimento in moto relativistico SR' risulta minore se osservata da un sistema di riferimento in quiete relativa.***

## 3.3. La dilatazione dei tempi

Per la dimostrazione di questo effetto relativistico, prendiamo nuovamente in considerazione la terna di assi con i due sistemi di riferimento SR e SR', ma supponiamo ora di voler misurare l'intervallo di tempo tra *due eventi consecutivi* che si susseguono nel punto E, posto in SR'.




- l'osservatore in SR rileverà $\Delta t = t_B - t_A$;
- l'osservatore in SR' rileverà $\Delta t' = t'_B - t'_A$.

Utilizzando la **Trasformata di Lorentz per il Tempo**, $t' = \gamma\left(t - \frac{v_t}{c^2}x\right)$, scritta in questa forma perché $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_t^{\,2}}{\vec{c}^{\,2}}}}$, si ottiene $t_A = \gamma\left(t'_A - \frac{v_t}{c^2}x'\right)$ e $t_B = \gamma\left(t'_B - \frac{v_t}{c^2}x'\right)$.

$$\Delta t = t_B - t_A = \gamma\left(t'_B - \frac{v_t}{c^2}x'\right) - \gamma\left(t'_A - \frac{v_t}{c^2}x'\right) = \gamma\left(t'_B - \frac{v_t}{c^2}x' - t'_A + \frac{v_t}{c^2}x'\right)$$

Elidendo i termini uguali ed opposti ottengo che

$\Delta t = \gamma\left(t'_B - t'_A\right)$, ossia $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Ma nuovamente il termine $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_t^{\,2}}{\vec{c}^{\,2}}}}$, ossia $\gamma > 1$, allora $\frac{\Delta t}{\Delta t'} > 1$ e $\mathbf{\Delta t > \Delta t'}$. Il tempo calcolato da SR risulta maggiore di quello calcolato in SR', pertanto:

***La durata degli eventi in un sistema in moto relativistico SR' è più lunga di quella calcolata in un sistema di riferimento SR in quiete relativa.***