Gruppo Astrofili F. Argelander

Cosmologia

Velocità di recessione

Il *Red Shift*

La *Costante di Hubble*

L'età dell'Universo

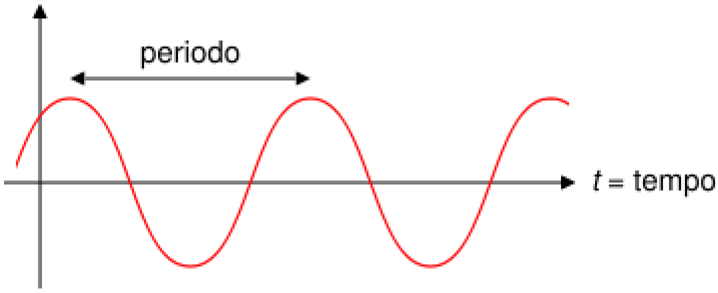
Note

Riferimenti bibliografici

A cura di: Paolo Botton – *responsabile scientifico*

Velocità di recessione e suo calcolo

Una sorgente di luce emette onde le cui creste sono separate da un tempo T, detto periodo, che ne caratterizza sia la frequenza f sia la lunghezza d'onda λ.



Se la sorgente si allontana con velocità v, nel tempo tra le due creste, essa sia allontana di vT; lo spazio è infatti il prodotto di una velocità ed un tempo.
Questo spostamento aumenta il tempo richiesto perché la cresta d'onda giunga all'osservatore di una quantità data dalla relazione $\frac{vT}{c}$. Sappiamo infatti che un tempo t è il rapporto tra uno spazio percorso e la velocità con cui lo si percorre; in questo caso, vT rappresenta uno spazio mentre c rappresenta la velocità di propagazione, che coincide con la velocità della luce.

Il tempo tra l'arrivo di due creste successive vale $T_0 = T + \frac{vT}{c}$.

Dato che $\lambda = \frac{c}{f}$ e $f = \frac{1}{T}$, allora la lunghezza d'onda della luce emessa dalla sorgente è $\lambda = cT$.

Quando la stessa giunge all'osservatore vale $\lambda_0 = cT_0$.
Il rapporto tra le due lunghezze d'onda tipiche del segnale vale:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{cT_0}{cT} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{T + \frac{vT}{c}}{T} = \frac{T\left(1 + \frac{vT}{c}\right)}{T} = 1 + \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + \frac{v}{c}$$

Se la sorgente si avvicina all'osservatore, v è sostituita con $-v$.
Se una galassia s'allontana con una velocità di 1000 ms^{-1}, la lunghezza d'onda λ_0 di una riga spettrale emessa sarà maggiore rispetto al valore di riferimento noto di laboratorio di una quantità

$\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + \frac{v}{c} = 1 + \frac{1000 kms^{-1}}{300000 kms^{-1}} = 1{,}00\overline{33}$, ossia un incremento pari allo $0{,}\overline{33}\%$ di c.

Conoscendo invece il rapporto $\frac{\lambda_0}{\lambda}$, è facile calcolare la **velocità di recessione**.

Ad esempio: $\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1.0273$, ossia un incremento pari allo $2{,}73\%$ di c.

$1.0273 = 1 + \frac{v_{rec}}{300000 km s^{-1}} \Rightarrow v_{rec} = (1.0273 - 1) \cdot 300000\ km s^{-1}$, pertanto

$$v_{rec} = 300000 \times 0{,}0273 = 8190\, km s^{-1}$$

Red Shift, Costante di Hubble, età dell'Universo

Lo spostamento verso il rosso, osservato in astronomia, può essere misurato perché gli spettri di emissione e assorbimento dei vari atomi sono ben distinti e molto ben conosciuti.
In laboratorio s'indentificano le linee spettrali degli elementi chimici prendendo come riferimento la lunghezza d'onda λ che ne caratterizza la posizione nello spettro; si osserva quindi la sua omologa nello spettro di una galassia, che se in allontanamento risulta sistematicamente spostata verso lunghezze d'onda maggiori λ_0 (regione rossa dello spettro).
Una galassia osservata si allontana con una certa velocità V che dipende, come abiamo visto nel calcolo della velocità di recessione, dal cambiamento delle lunghezze d'onda, ossia $\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda$.

Il rapporto $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, indicato con z, nella meccanica classica fornisce il rapporto tra la velocità v della sorgente luminosa e quella della luce c. Vale pertanto la relazione $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$ (se $v \langle\langle c$: vedi note)

Hubble intuì che lo spazio era in espanzione e, a fronte dei dati osservativi relativi a misurazioni di velocità e di distanza delle galassie, introdusse una costante si proporzionalità H_0, in modo che lo spostamento verso il rosso fosse funzione della distanza dei corpi celesti. Giunse alla formulazione della **Legge di Hubble**, espressa nella forma $\mathbf{cz = H_0 \times d}$, dove cz rappresenta una velocità.
H_0 è pertanto una misura dell'attuale tasso di espansione dell'Universo, cioè di quanto velocemente si allontanano le galassie in km/s in base alla loro distanza in Megaparsec (1 Mpc=10^6 parsec). L'unità di misura di H_0 è km / (s · Mpc).
La **Costante di Hubble** non è *statica*, varia con l'età del Cosmo che oggi sappiamo in espansione accelerata; il valore calcolato nel 2010 vale **71.0 ± 2.5 km/(s · Mpc)**.
Bisogna notare che, su scale molto grandi, la teoria di Einstein prevede che il comportamento reale degli oggetti si distacchi da quello lineare previsto dalla legge di Hubble (vedi note).
Riconosciuto che lo spazio si sta espandendo, stirato in tutte le direzioni, supponiamo 3 punti A, B e C ai vertici di un triangolo nello spazio; con l'espansione, i punti si allontanbano tra loro in A' B' e C' ed un qualunque regmento R, posto nello spazio in espansione, aumenta conseguentemente la lua lunghezza, ed aumenterà anche la lunghezza d'onda λ di qualunque radiazione emessa ad una certa epoca quando, per esempio, la lunghezza del segmento era R. Se la lunghezza del segmento osservato oggi vale R_0, anche la sua lunghezza d'onda vale λ_0; quindi possiamo scrivere il rapporto tra le lunghezze d'onda come $\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{R_0}{R}$.

La radiazione elettromagnetica giunta fino a noi ha aumentato la sua lunghezza d'onda, subendo quindi un *red-shift* (spostamento verso il rosso) z. Si ha, quindi:
$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1$, ma $\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{R_0}{R}$. Per sostituzione si ha $z = \frac{R_0}{R} - 1$, $\Rightarrow 1 + z = \frac{R_0}{R}$.

Questo è un importante risultato perché indica che il *red-shift* è un effetto cosmologico, non dovuto all'Effetto Doppler, è una caratteristica fondamentale dell'espansione dell'Universo.

Poiché R e R_0 sono grandezze geometriche, il *red-shift* è associato ad una radiazione emessa da un oggetto in una certa epoca cosmica, quando le dimensioni dello spazio erano più piccole di quelle che osserviamo oggi. Dato un qualsiasi redshift z, l'universo si è da allora espanso di un fattore ($1 + z$); se una galassia ha un *red-shift* z = 6, un volume di spazio che allora aveva 1 milione di anni luce di diametro, oggi ha z + 1 = 6 + 1 = 7 milioni di anni luce.

Il rapporto tra z e l'età dell'Universo è più complesso. In *termini estremamente generali*, a un *red-shift* pari a z l'Universo aveva al massimo un'età pari a $\frac{1}{(1+z)}$ rispetto all'attuale.

Ad esempio, a $z = 1$ l'Universo aveva al massimo metà dell'età attuale; a $z = 3$, meno di un quarto.

$z = 0$ corrisponde alla nostra era, infatti $\frac{1}{(1+z)} = \frac{1}{(1+0)} = 1$.

La *Radiazione Cosmica di Fondo a Microonde* (CMBR) ha un red-shift a $z = 1089$, che corrisponde ad un'età approssimativa di 379·000 anni dopo il Big Bang ed una *distanza comovente* di oltre 46 miliardi di anni (fonte: Lineweaver, Charles; Tamara M. Davis - 2005. "Misconceptions about the Big Bang". Scientific American.).
46 miliardi di anni luce è un valore che sembra in contrasto con l'età del Cosmo (il cui calcolo sarà descritto a breve), questo perché, di solito, non si tiene in conto l'espansione dell'universo intervenuta nel frattempo. La radiazione cosmica di fondo emessa poco dopo il Big Bang, quindi, proviene da materia che oggi si trova già a circa 46 miliardi di anni luce. Questa è la distanza che definisce approssimativamente i limiti dell'universo osservabile.

Come si può calcolare, $\frac{1}{(1+z)} = \frac{1}{(1+1089)} = 0{,}000917431$, ma il prodotto di questo quoziente per l'età ad oggi stimata dell'Universo non fornisce 379·000 anni, ecco il perché ho parlato di "*termini estremamente generali*".
Tra gli oggetti astronomici con maggiore *red-shift* troviamo la galassia catalogata UDFy-38135539, con $z = 8{,}6$ corrispondente a circa 600 milioni di anni dopo il Big Bang.
Una volta nota l'età dell'universo e accettando l'assunzione che la velocità della luce sia costante, è ovvio che non ci è possibile osservare oggetti più lontani dello spazio percorso dalla luce durante l'intera vita dell'universo.
Vediamo qual è l'età stimata dell'Universo.

La Costante di Hubble vale $H_0 = \frac{cz}{d} \mapsto \frac{[velocità]}{[spazio]}$, allora è l'inverso di un tempo T, pertanto il Tempo di Hubble è anche l'età dell'universo al momento attuale $T = \frac{1}{H_0}$.

Per eseguire il calcolo ci servono alcuni valori di riferimento:

- 1 Mpc = 3,26 • 10^6 anni luce
- Velocità della luce c = 299.792.458 ms^{-1}
- Secondi in un anno = 31.536.000
- 1 anno luce = 299.792.458 $ms^{-1} \times$ 31.536.000 s = 9.454.254.955.488.000 m
- 1 Mpc = 3,26 • 10^6 anni luce $\times$ 9.454.254.955.488.000 m = 3,0821 • 10^{19} km

L'età – stimata – dell'Universo è:

$$T = \frac{1}{71\,\mathrm{kms}^{-1} Mpc^{-1}} = \frac{1}{71\,\mathrm{kms}^{-1}} \times 3{,}0821 \cdot 10^{19}\ \mathrm{km} = \frac{1}{71\,\mathrm{s}^{-1}} \times 3{,}0821 \cdot 10^{19} =$$

$$= 0{,}013\overline{8}s \times 3{,}0821 \cdot 10^{19} = 4{,}253298 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}$$. In un anno ci sono 31.536.000 s, pertanto

$$T = \frac{4{,}253298 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}}{31.536.000\,\mathrm{s}\ \ \mathrm{anno}^{-1}} = 1{,}3487 \cdot 10^{10}\ \mathrm{anni}$$, ossia 13,5 miliardi di anni.

NOTE

Oltre che in termini di lunghezza d'onda, z può essere espressa come rapporto tra frequenze.

Abbiamo precedentemente visto che $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \;\Rightarrow\; z = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1$.

Dalla fisica classica sappiamo che $f = \frac{c}{\lambda}$, pertanto è anche vero che $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$,

da cui $\lambda = \frac{c}{f}$ e $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$. Per sostituzione, si ha: $z = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 = \frac{\frac{c}{f_0}}{\frac{c}{f}} - 1 \;\Rightarrow\; z = \frac{f}{f_0} - 1$

La relazione $\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + \frac{v}{c}$, introdotta nel calcolo della velocità di recessione, porta con se un'ulteriore implicazione; infatti c'è visto prima che $z = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1$, ossia $1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda}$, allora si ha $1 + z = 1 + \frac{v}{c}$, quindi $z = \frac{v}{c}$ solo se $v \langle\langle c$.

Si ricorda che $v > c$ è impossibile parlando di oggetti che si muovono; per contro, $v > c$ è possibile nel caso di **red-shift cosmologico** dal momento che lo spazio che separa due oggetti (ad esempio i quasars dalla Terra) può espandersi più velocemente della luce.

Nel caso di velocità relativistiche, l'equazione è $1 + z = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot \gamma$, con γ il Fattore di Lorentz.

Sono qui illustrate le tre forme che l'equazione può assumere:

$$1 + z = \frac{1 + v\cos(\theta)/c}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Se l'oggetto osservato si muove secondo un angolo θ, rispetto all'osservatore.

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + (v/c)}{1 - (v/c)}}$$

Se l'oggetto si muove lungo l'angolo di visuale, con $\theta = 0°$

$$1 + z = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Se la sorgente si muove ad angolo retto ($\theta = 90°$), rispetto al rilevatore, il red-shift relativistico è noto come *redshift trasversale*.

Bibliografia

La stesura di questo documento è stata possibile grazie agli studi condotti sui seguenti volumi:

- **I primi tre minuti**, di Steven Weinberg – Arnoldo Mondadori Editore
- **La complessità dell'universo**, di Giuliano Romano – Gremese Editore